

Guía 1: Derivadas en Varias Variables

Instrucciones: Desarrolle los ejercicios en su cuaderno de manera ordenada. Recuerde que estos ejercicios serán tomados en cuenta para los controles y solemnes.

1. Derivadas Parciales de Primer Orden

1.1. Cálculo de Derivadas Parciales

Calcule las derivadas parciales de primer orden ($f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$) para las siguientes funciones. Los ejercicios están ordenados de manera progresiva. Asegúrese de identificar qué regla de derivación (potencia, producto, cociente o cadena) es necesaria en cada caso:

a) $f(x, y) = 3x - 5y + 8$

o) $f(x, y) = y \ln(x)$

b) $f(x, y) = x^2 + 4y^3$

p) $f(x, y) = e^{xy}$

c) $f(x, y) = 5x^3y^2$

q) $f(x, y) = x^2e^{xy}$

d) $f(x, y) = 2x^2y - 4xy^2 + 3x$

r) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

e) $f(x, y) = (2x + 3y)^5$

s) $f(x, y) = y \ln(xy)$

f) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^4$

t) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

g) $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$

u) $f(x, y) = \frac{x+1}{y-2}$

h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

v) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

i) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

w) $f(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

j) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

x) $f(K, L) = 50K^{0,4}L^{0,6}$

k) $f(x, y) = e^{2x+5y}$

l) $f(x, y) = \ln(4x - y)$

y) $f(x, y) = \frac{1000}{x^2\sqrt{y}}$

m) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

z) $f(x, y) = 10 \ln x + 5 \ln y$

n) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4)$

ñ) $f(x, y) = xe^y$

aa) $f(x, y) = (x + 2y)e^{-x}$

1.2. Evaluación de Derivadas Parciales

Calcule las derivadas parciales indicadas y evalúelas en el punto $P(x_0, y_0)$ dado:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x, y) = 3x^2 - 5y^2$; evalúe $f_x(2, 1)$ | e) $f(x, y) = xe^y$; evalúe $f_x(2, 0)$ |
| b) $f(x, y) = x^3y^2$; evalúe $f_y(1, 2)$ | f) $f(x, y) = \ln(xy)$; evalúe $f_x(e, 1)$ |
| c) $f(x, y) = (2x - y)^3$; evalúe $f_x(1, 1)$ | g) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$; evalúe $f_y(4, 2)$ |
| d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; evalúe $f_y(3, 4)$ | h) $f(x, y) = y \ln(x^2)$; evalúe $f_{xy}(e, 3)$ |

2. Regla de la Cadena Multivariable

Caso 1: Una Variable Independiente ($z(t)$)

Considere $z = f(x, y)$ donde x e y dependen de t . Calcule la derivada total $\frac{dz}{dt}$ utilizando la fórmula:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

- | | |
|--|---|
| a) $z = 3x - 2y$; $x = t^2 + 1$, $y = 4t$ | m) $z = \frac{x}{y}$; $x = 2t$, $y = t^2$ |
| b) $z = x^2 + y^2$; $x = 2t$, $y = 3t$ | n) $z = \frac{y}{x+1}$; $x = t^2$, $y = t^3$ |
| c) $z = 2x^2 - 5y$; $x = 1 - t$, $y = t^2 + 1$ | ñ) $z = x^2y - y^2x$; $x = e^t$, $y = e^{-t}$ |
| d) $z = (x - y)^2$; $x = t^2$, $y = 2t$ | o) $z = \sqrt{xy}$; $x = t^2$, $y = t^4$ |
| e) $z = x^3 + 2y^2$; $x = t$, $y = t^2$ | p) $z = (x + y)^3$; $x = 1/t$, $y = t$ |
| f) $z = xy$; $x = e^t$, $y = e^{-t}$ | q) $z = \ln(xy)$; $x = t + 1$, $y = t - 1$ |
| g) $z = xe^y$; $x = 2t$, $y = \ln t$ | r) $z = (2x + 3y)^4$; $x = \sqrt{t}$, $y = t$ |
| h) $z = e^{x+y}$; $x = t^3$, $y = 1 - t^3$ | s) $z = e^{x^2-y}$; $x = t$, $y = t^2$ |
| i) $z = \ln(x + y)$; $x = e^t$, $y = e^t$ | t) $z = x \ln y$; $x = t^2$, $y = t$ |
| j) $z = \ln(2x + y)$; $x = t^2$, $y = t$ | u) $z = \frac{1}{x+y}$; $x = e^{-t}$, $y = e^{-2t}$ |
| k) $z = \sqrt{x+2y}$; $x = 3t$, $y = t^2$ | v) $z = \sqrt[3]{x-y}$; $x = 2t$, $y = t$ |
| l) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = t$, $y = 2t$ | w) $z = xe^{xy}$; $x = t$, $y = -t$ |

Caso 2: Dos Variables Independientes ($z(u, v)$)

Considere $z = f(x, y)$ donde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. Calcule las derivadas parciales solicitadas utilizando las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

- a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = 4x + 5y$; $x = u - v$, $y = 2u + v$
- b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = x^2 - y^2$; $x = u + v$, $y = u - v$
- c) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = 3x^2 + 2y$; $x = u^2$, $y = v^2$
- d) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = xy$; $x = 2u - v$, $y = u + 3v$
- e) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = \frac{x}{y}$; $x = ue^v$, $y = ve^u$
- f) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = x^2y$; $x = u + v$, $y = u - v$
- g) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = (x + y)^2$; $x = uv$, $y = u/v$
- h) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = e^{x+y}$; $x = u^2$, $y = v^2$
- i) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = \ln(x + y)$; $x = uv$, $y = u/v$
- j) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = e^{xy}$; $x = u + v$, $y = u - v$
- k) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = u$, $y = v$
- l) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = \sqrt{xy}$; $x = u^2$, $y = v^2$
- m) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ para:
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = u + v$, $y = u - v$
- n) Dado $z = x^2y$ con $x = u + v$, $y = u - v$, calcule el valor simplificado de:
 $M = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$
- ñ) Dado $z = e^{xy}$ con $x = 2u$, $y = v/2$, demuestre que:
 $u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} = 0$
- o) Dado $z = \ln(x^2 - y^2)$ con $x = u + v$, $y = u - v$, simplifique la expresión:
 $E = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$
- p) Si $z = f(x, y)$ es diferenciable, con $x = u^2 - v^2$ e $y = v^2 - u^2$. Demuestre que:
 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$
- q) Dado $z = \frac{x-y}{x+y}$ con $x = u$, $y = uv$. Calcule y simplifique:
 $K = u \frac{\partial z}{\partial u} + v \frac{\partial z}{\partial v}$

- r) Sea $z = xe^y$ con $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$. Calcule el valor de $\frac{\partial z}{\partial u}$ cuando $u = 1, v = 1$.
- s) Sea $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ con $x = (u + v)^2, y = (u - v)^2$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial v}$ y verifique si es constante.
- t) Dado $z = 2x - 3y$, con $x = u \ln v$ e $y = v \ln u$. Determine la expresión para $\frac{\partial z}{\partial v}$.
- u) Si $z = x^2 + y^2$ con $x = e^{u+v}$ e $y = e^{u-v}$. Demuestre que $\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 4(x^4 - y^4)$.

Evaluación con Regla de la Cadena

En los siguientes ejercicios, calcule el valor numérico de la derivada solicitada.

Caso 1: Una variable independiente ($z(t)$)

- a) Sea $z = x^2 + y^2$, con $x = 2t$ e $y = 3t$. Calcule $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=1}$.
- b) Sea $z = xy$, con $x = t^2$ e $y = t + 1$. Calcule $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=2}$.
- c) Sea $z = \sqrt{x + y}$, con $x = 3t$ e $y = t^2 + 2$. Calcule $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=2}$.
- d) Sea $z = \frac{x}{y}$, con $x = e^t$ e $y = e^{-t}$. Calcule $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=0}$.
- e) Sea $z = (2x - y)^4$, con $x = t^2$ e $y = 2t^2$. Calcule $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=1}$.
- f) Sea $z = \ln(x + 2y)$, con $x = t$ e $y = \sqrt{t}$. Calcule $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=4}$.

Caso 2: Dos variables independientes ($z(u, v)$)

- g) Sea $z = 3x - 2y$, con $x = u + v$ e $y = u - v$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,1)}$.
- h) Sea $z = x^2y$, con $x = uv$ e $y = u/v$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,2)}$.
- i) Sea $z = e^{xy}$, con $x = u^2$ e $y = v$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(1,0)}$.
- j) Sea $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $x = 3u$ e $y = 4v$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(1,1)}$.
- k) Sea $z = \ln(x/y)$, con $x = e^u$ e $y = e^v$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(0,0)}$.
- l) Sea $z = x^2 - y^2$, con $x = u \ln v$ e $y = v \ln u$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(e,e)}$.
- m) Sea $z = \frac{1}{x+y}$, con $x = u^2$ e $y = v^2$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(1,2)}$.
- n) Sea $z = \sqrt{x + y}$, con $x = u^2$ e $y = v^2$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(3,4)}$.