Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemáticas
FMMP210 - Matemáticas 3
Primer Semestre 2026

Guía 6: Primitivas con Valor Inicial

Instrucciones: Desarrolle los ejercicios en su cuaderno de manera ordenada. Recuerde que estos ejercicios serán tomados en cuenta para los controles y solemnes.

1. Primitivas con Valor Inicial

1.1. Cálculo Directo de Primitivas

Encuentre la función $f(x)$ que satisface la derivada dada y la condición inicial indicada en cada caso:

a) $f'(x) = 2x + 3$, con $f(1) = 5$

b) $f'(x) = 3x^2 - 4x$, con $f(2) = 10$

c) $f'(x) = e^x$, con $f(0) = 7$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$, con $f(1) = 2$

e) $f'(x) = \sqrt{x}$, con $f(4) = 10$

f) $f'(x) = (x+2)^2$, con $f(1) = 10$

g) $f'(x) = e^{2x}$, con $f(0) = 3$

h) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, con $f(0) = 6$

i) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, con $f(0) = 5$

j) $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, con $f(0) = \ln(2)$

k) $f'(x) = x\sqrt{x^2+9}$, con $f(4) = 40$

l) $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, con $f(e) = 2$

m) $f'(x) = \ln(x)$, con $f(1) = 3$

n) $f'(x) = xe^x$, con $f(0) = 2$

ñ) $f'(x) = x\ln(x)$, con $f(1) = 4$

o) $f'(x) = x^2e^x$, con $f(0) = 5$

p) $f'(x) = (x+1)e^{-x}$, con $f(0) = 1$

q) $f'(x) = \ln(x^2)$, con $f(1) = 0$

r) $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$, con $f(2) = 0$

s) $f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$, con $f(3) = \ln(5)$

t) $f'(x) = \frac{3}{x^2-x-2}$, con $f(3) = 0$

u) $f'(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$, con $f(4) = \ln(2)$

v) $f'(x) = \frac{5x}{x^2+x-12}$, con $f(4) = 1$

w) $f'(x) = \frac{4}{x^2-9}$, con $f(4) = 0$

x) $f'(x) = 2\sqrt[3]{x}$, con $f(8) = 20$

y) $f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{x^3}$, con $f(1) = 4$

z) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, con $f(3) = 5$

a1) $f'(x) = xe^{2x}$, con $f(0) = 1$

b1) $f'(x) = \frac{2}{x^2-3x}$, con $f(4) = 0$

c1) $f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, con $f(1) = -4$

1.2. Aplicaciones Contextualizadas

A partir de la razón de cambio, derivada o función marginal, entregada en cada problema, modele la función original encontrando la constante de integración mediante la condición inicial explícita o implícita en el enunciado:

a) El costo marginal de producir q artículos está dado por $C'(q) = 6q + 15$. Si los costos fijos ascienden a \$1200, determine la función de costo total $C(q)$.

b) El ingreso marginal por la venta de q unidades es $I'(q) = 200 - 4q$. Sabiendo que al no vender ninguna unidad el ingreso es \$0, encuentre la función $I(q)$.

c) La utilidad marginal de un fabricante es $U'(q) = 80 - 0{,}2q$. Si la empresa reporta una utilidad de \$1500 al producir 50 unidades, calcule a cuánto ascenderá la utilidad si se producen 100 unidades.

d) Una empresa estima que su costo marginal obedece a $C'(q) = 3q^2 - 10q + 50$. Si el costo de producir 10 unidades es de \$2000, halle la función de costo total $C(q)$.

e) La propensión marginal al ahorro en función del ingreso nacional Y es $S'(Y) = 0{,}4 - 0{,}001Y$. Si el ahorro es de 50 billones cuando el ingreso es de 200 billones, calcule a cuánto asciende el ahorro si el ingreso nacional sube a 300 billones.

f) Un equipo industrial se deprecia a una tasa anual de $V'(t) = -2000e^{-0{,}2t}$, donde t son años. Si a los 5 años de uso su valor contable es de \$12000, determine la función de valor $V(t)$.

g) La población de una ciudad crece a una tasa de $P'(t) = 500e^{0{,}05t}$ habitantes por año. Si al cabo de 10 años la población es de 150,000 habitantes, modele la función poblacional $P(t)$.

h) El costo marginal diario de producción es $C'(q) = \frac{400}{q+1}$. Si el costo de producir 9 unidades es de \$1500, calcule cuál será el costo total diario al producir 19 unidades.

i) Una plataforma de streaming determina que su ingreso marginal por cada suscriptor adicional x es $I'(x) = \frac{1000}{\sqrt{x+4}}$. Sabiendo que con 5 suscriptores el ingreso total es de \$3000, encuentre el ingreso total que generarán 12 suscriptores.

j) La tasa a la cual aumentan los costos de mantenimiento de un edificio de t años es $C'(t) = 120t + 500$. Si en el segundo año se gastaron \$2500 en total acumulado, determine el costo acumulado proyectado para el cuarto año, $C(4)$.

k) El costo marginal de manufacturar q componentes es $C'(q) = 10e^{0{,}02q}$. Si al producir 50 componentes el costo es de \$8000, halle la función de costo total $C(q)$.

l) El nivel de ventas de un producto decae a una tasa de $V'(t) = 5000te^{-t^2}$ unidades por semana. Si al concluir la primera semana las ventas acumuladas eran de 2000 unidades, encuentre la función de ventas $V(t)$.

m) La propensión marginal al consumo está dada por $C'(Y) = 0{,}7 + \frac{5}{\sqrt{Y+1}}$. Si cuando el ingreso es $Y = 3$ el consumo es de 150, calcule el nivel de consumo para un ingreso $Y = 8$.

n) El costo marginal de producción sigue el modelo $C'(x) = x\sqrt{x^2 + 25}$. Si el costo de ensamblar 12 unidades alcanza los \$2500, determine la función de costo total $C(x)$.

ñ) La tasa de variación de ingresos por inversión publicitaria x (en miles) es $I'(x) = \frac{100x}{x^2+1}$. Si al invertir 3 miles de dólares los ingresos generados son \$6000, calcule los ingresos si la inversión aumenta a 7 miles de dólares.

o) La ganancia marginal diaria por ensamblar q computadores es $G'(q) = \ln(q)$. Si al ensamblar 2 computadores la ganancia total es \$150, encuentre la ganancia total al ensamblar e^2 computadores.

p) El costo marginal de un proceso complejo es $C'(q) = qe^{0,1q}$. Sabiendo que al procesar 10 unidades los costos totales ascienden a \$5000, determine el costo total esperado para 20 unidades.

q) El ingreso marginal de una app en función de los meses t desde su actualización es $I'(t) = t\ln(t)$. Si el ingreso en el primer mes fue de \$10 miles, calcule los ingresos acumulados al tercer mes.

r) Un automóvil pierde valor comercial de manera que su depreciación marginal es $V'(t) = -1000te^{-0,5t}$. Si luego de 2 años su valor de reventa es de \$15000, halle la función $V(t)$.

s) El ritmo de crecimiento marginal del PIB de un sector tecnológico depende del capital K invertido según $P'(K) = K^2\ln(K)$. Si para $K = 2$ la producción total es 100, calcule la producción cuando $K = 4$.

t) La tasa a la que crece una colonia bacteriana en laboratorio es $B'(t) = \ln(t+1)$. Si transcurridos 2 días había 500 bacterias, modele la función de población $B(t)$.

u) La tasa de crecimiento poblacional de una especie protegida en la semana t es $P'(t) = \frac{100}{t^2-4}$. Si en la semana 3 la población era de 50 individuos, calcule la población esperada para la semana 4.

v) El costo marginal de procesar x toneladas de un desecho tóxico es $C'(x) = \frac{50}{x^2-1}$. Si procesar 2 toneladas cuesta \$100, calcule el costo de procesar 3 toneladas.

w) La utilidad marginal por producir q unidades es $U'(q) = \frac{q-2}{q^2-3q-4}$. Si al producir 6 unidades la utilidad es \$50, halle la función de utilidad $U(q)$.

x) El ritmo de afiliación de nuevos usuarios a una red obedece a $N'(t) = \frac{200}{t^2-25}$. Si en el mes 6 había 1000 usuarios, calcule la cantidad de usuarios proyectada para el mes 10.

y) El costo marginal de extracción de un mineral es $C'(q) = \frac{q}{q^2-8q+15}$. Si extraer 6 toneladas cuesta \$500, determine el costo total de extraer 7 toneladas.

z) El ingreso marginal por exportaciones es $I'(x) = x\ln(x^2)$. Si al exportar e unidades el ingreso es \$1000, encuentre la función $I(x)$.

a1) El costo marginal en un aserradero es $C'(q) = \frac{3q^2+q}{q^3-q}$. Si producir 2 unidades cuesta \$50, calcule el costo total de producir 4 unidades.

b1) El valor residual de una maquinaria obedece a la tasa $V'(t) = (t+1)e^{-t}$. Si luego de 1 año de uso su valor es \$5000, calcule su valor al cabo de 2 años.

c1) La utilidad marginal por venta de software corporativo es $U'(x) = \frac{20x}{x^2-16}$. Si al vender 5 licencias se gana \$100, determine la función de utilidad $U(x)$.