Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemáticas
FMMP210 - Matemáticas 3
Primer Semestre 2026

Guía 9: Integrales Impropias

Instrucciones: Desarrolle los ejercicios en su cuaderno de manera ordenada. Recuerde que estos ejercicios serán tomados en cuenta para los controles y solemnes.

1. Integrales Impropias de Primera Especie

Límites al Infinito Útiles

Al evaluar los límites de integración correspondientes a los infinitos, recuerde los siguientes resultados fundamentales (asumiendo constantes $k > 0$ y potencias $p > 0$, ya sean enteras o fraccionarias como las raíces):

- **Potencias Directas y Raíces:**
  - Hacia el infinito positivo: $\lim_{x\to\infty} x^p = \infty$ (ej. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$).
  - Hacia el infinito negativo (para p entero, depende de su paridad):
    - Si p es **par**: $\lim_{x\to-\infty} x^p = \infty$ (ej. $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$).
    - Si p es **impar**: $\lim_{x\to-\infty} x^p = -\infty$ (ej. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$).
- **Potencias y Raíces Inversas:** $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ (siempre que esté definida). Ej. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
- **Exponenciales:** $\lim_{x\to\infty} e^{-kx} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} e^{kx} = 0$.
- **Logaritmos:** $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.
- **Crecimiento Comparado (Jerarquía de Infinitos):** Al evaluar formas indeterminadas, recuerde qué función crece más rápido hacia el infinito:
  - La exponencial domina a la potencia/raíz: $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-kx} = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^{kx}} = 0$.
  - La potencia/raíz domina al logaritmo: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$ (ej. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$).

Determine si cada una de las siguientes integrales impropias converge o diverge. Si converge, calcule su valor numérico exacto aplicando las propiedades de los límites correspondientes:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$

d) $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$

e) $\int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

f) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

g) $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

h) $\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

i) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

j) $\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$

k) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

l) $\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2}\,dx$

m) $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$

n) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

ñ) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx$

o) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$

p) $\int_3^\infty \frac{2}{x^2-4}\,dx$

q) $\int_4^\infty \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

r) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx$

s) $\int_5^\infty \frac{5}{x^2+x-12}\,dx$