Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemáticas

NOTA

SOLEMNE 1
FMMP210 - Matemáticas III
Primer semestre 2026

Problema	Puntaje
1	
2	
3	
4	
Total	

Datos del estudiante

- Nombre del estudiante: ....
- RUT: ....

Indicaciones:

- Duración: 90 minutos
- ESTA PERMITIDO EL USO DE CALCULADORAS CIENTÍFICAS SIMPLES
- Todas las preguntas tiene igual puntaje (15 puntos cada una)
- Debe tener consigo un documento que verifique su identidad y debe mostrarlo si es requerido por el docente.
- Debe desarrollar cada pregunta en la hoja correspondiente, no se aceptan hojas anexas.
- Preguntas incompletas y/o con desarrollo incoherente serán evaluadas con menor puntaje. Justifique todas sus respuestas.
- Debe resolver los ejercicios utilizando los contenidos vistos en clases.
- Ponga su celular en silencio dentro de su bolso o mochila, y ciérrela de manera segura.
- Si usted es sorprendido con un celular, encendido o apagado, en su persona (por ejemplo, en un bolsillo) o en su área personal (por ejemplo, en el asiento), será calificado con nota 1,0.
- Escuche atentamente y aténgase a las instrucciones dadas por el docente acerca del desarrollo de la evaluación.
- Debe devolver este cuadernillo completo. La ausencia de alguna de sus hojas se considerará evidencia de falta.
- Una vez comenzada la evaluación debe esperar por lo menos 30 minutos para entregar sus respuestas al docente.
- Solo puede salir de la sala luego de entregar su prueba.
- No está permitido el uso de apuntes ni el traspaso de información o materiales durante el desarrollo de la prueba. Cualquier instancia de este tipo, detectada durante o posterior a la evaluación, será sancionada con nota 1,0.
- Sea ordenado en su desarrollo e indique claramente cuál es su respuesta final.
- Además de las sanciones mencionadas en estas instrucciones, y dependiendo de la gravedad, la universidad pueda exigir otras sanciones según al reglamento del estudiante

....

Declaro estar conforme con mi nota

NOTA

- Nombre del estudiante: ....
- RUT: ....
- Fecha: ....

Firma del estudiante: ____________________

Problema. 1

Considere la función

$$f(x,y) = e^{2x^2+y^2}$$

Simplificar la expresión:

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial f}{\partial y}$$

Solución:
Calculamos las primeras derivadas parciales de la función con respecto a x e y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xe^{2x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{2x^2+y^2}$$

...5 puntos

A partir de la primera derivada respecto a x, calculamos las segundas derivadas parciales necesarias, utilizando la regla del producto donde corresponda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4xe^{2x^2+y^2}\right) = 4e^{2x^2+y^2} + 4x\left(4xe^{2x^2+y^2}\right) = (4+16x^2)e^{2x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4xe^{2x^2+y^2}\right) = 4x\left(2ye^{2x^2+y^2}\right) = 8xye^{2x^2+y^2}$$

...5 puntos

Sustituimos estas derivadas en la expresión original y factorizamos el término exponencial común $e^{2x^2+y^2}$ para simplificar los términos algebraicos:

$$\begin{aligned} y\left((4+16x^2)e^{2x^2+y^2}\right) - 2x\left(8xye^{2x^2+y^2}\right) - 2\left(2ye^{2x^2+y^2}\right) &= \\ e^{2x^2+y^2}\left(4y + 16x^2y - 16x^2y - 4y\right) &= \\ e^{2x^2+y^2}\,(0) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión se simplifica a 0. ...5 puntos

Problema. 2

Dada la función
$$f(x,y)=\frac{x^4}{2x-y}.$$
Verificar usando el Teorema de Euler que la función f es homogénea y dar su grado con esta fórmula. No calcular directamente el grado de homogeneidad de f.

Solución:
El Teorema de Euler establece que si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado n, entonces se cumple la siguiente relación: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$.

Primero, calculamos la derivada parcial de la función con respecto a x aplicando la regla del cociente y simplificamos el numerador:
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{4x^3(2x-y)-x^4(2)}{(2x-y)^2}=\frac{8x^4-4x^3y-2x^4}{(2x-y)^2}=\frac{6x^4-4x^3y}{(2x-y)^2}$$

...5 puntos

Luego, calculamos la derivada parcial con respecto a y utilizando la regla de la cadena, o del cociente:
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^4\cdot(-1)(2x-y)^{-2}\cdot(-1)=\frac{x^4}{(2x-y)^2}$$

...5 puntos

A continuación, sustituimos estas derivadas en el lado izquierdo de la ecuación de Euler ($x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$) y factorizamos para simplificar:
$$\begin{aligned}
x\left(\frac{6x^4-4x^3y}{(2x-y)^2}\right)+y\left(\frac{x^4}{(2x-y)^2}\right)&=\frac{6x^5-4x^4y+x^4y}{(2x-y)^2}\\
&=\frac{6x^5-3x^4y}{(2x-y)^2}\\
&=\frac{3x^4(2x-y)}{(2x-y)^2}\\
&=\frac{3x^4}{2x-y}\\
&=3\left(\frac{x^4}{2x-y}\right)\\
&=3f(x,y)
\end{aligned}$$

Como la expresión resultante es exactamente $3f(x,y)$, queda verificado por el Teorema de Euler que la función es homogénea y su grado de homogeneidad es $n=3$. ...5 puntos

Problema. 3

Una empresa tecnológica produce dos tipos de software empresarial, cuyas cantidades mensuales vendidas se denotan por x e y medidos en cientos de licencias. La función de utilidad conjunta de la empresa, modelada en miles de dólares, está dada por:

$$U(x,y) = -2x^2 - y^2 + 2xy + 8x + 4y$$

Encuentre las cantidades x e y que maximizan la utilidad de la empresa y la utilidad máxima.

Solución:
Para maximizar la función de utilidad, primero buscamos los puntos críticos igualando las primeras derivadas parciales a cero:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -4x + 2y + 8 = 0$$
$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -2y + 2x + 4 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones sumando ambas expresiones: $(-4x + 2y + 8) + (-2y + 2x + 4) = 0 \implies -2x + 12 = 0 \implies x = 6$.
Sustituyendo $x = 6$ en la segunda ecuación: $-2y + 2(6) + 4 = 0 \implies -2y = -16 \implies y = 8$. ...5 puntos

Para verificar que el punto $(6,8)$ corresponde a un máximo, aplicamos el criterio de la segunda derivada (Hessiano). Calculamos las segundas derivadas parciales:

$$U_{xx} = -4, \quad U_{yy} = -2, \quad U_{xy} = 2$$

Calculamos el discriminante $D = U_{xx}U_{yy} - (U_{xy})^2$:

$$H = (-4)(-2) - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

Como $H > 0$ y $U_{xx} < 0$, el punto crítico $(6,8)$ es efectivamente un máximo relativo. ...5 puntos

Finalmente, calculamos la utilidad máxima evaluando la función original en las cantidades encontradas:

$$\begin{aligned} U(6,8) &= -2(6)^2 - (8)^2 + 2(6)(8) + 8(6) + 4(8) \\ &= -72 - 64 + 96 + 48 + 32 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la utilidad se maximiza con la venta de 6 cientos de licencias del primer software y 8 cientos del segundo, resultando en una utilidad total de 40 mil dólares. ...5 puntos

Problema. 4

Una fábrica de muebles modela su producción diaria mediante una función empírica de Cobb-Douglas $P(L,K) = 50L^{0.6}K^{0.4}$, donde L representa las horas de trabajo operario y K son las horas de uso de maquinaria. El gerente de planta dispone de un presupuesto diario fijo de 10.000 dólares para estos factores. Por convenios sindicales y contratos de leasing, la hora de trabajo operario tiene un costo de 20 dólares, mientras que la hora de uso de maquinaria cuesta 50 dólares.
Encontrar la combinación óptima de horas de trabajo y horas de maquinaria que maximiza la producción diaria y el valor de dicha producción.

Solución:
Para maximizar la producción sujeta a la restricción presupuestaria, definimos primero la restricción como $g(L,K) = 20L + 50K - 10000 = 0$. Luego, construimos la función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(L,K,\lambda) = 50L^{0.6}K^{0.4} - \lambda(20L + 50K - 10000)$$

Planteamos el sistema de ecuaciones igualando las derivadas parciales de la función de Lagrange a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= 30L^{-0.4}K^{0.4} - 20\lambda = 0 \implies 30L^{-0.4}K^{0.4} = 20\lambda \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= 20L^{0.6}K^{-0.6} - 50\lambda = 0 \implies 20L^{0.6}K^{-0.6} = 50\lambda
\end{aligned}$$

Dividiendo ambas ecuaciones para eliminar λ, obtenemos la relación óptima entre los recursos:

$$\frac{30L^{-0.4}K^{0.4}}{20L^{0.6}K^{-0.6}} = \frac{20\lambda}{50\lambda} \implies 1.5\frac{K}{L} = 0.4 \implies L = 3.75K$$

...5 puntos

Sustituimos la relación $L = 3.75K$ en la restricción presupuestaria $g(L,K) = 0$ para hallar los valores óptimos:

$$\begin{aligned}
20(3.75K) + 50K &= 10000 \\
75K + 50K &= 10000 \\
125K &= 10000 \implies K = 80
\end{aligned}$$

Calculamos L usando la relación previa: $L = 3.75(80) = 300$. Por lo tanto, se maximiza la producción con 300 horas de trabajo operario y 80 horas de maquinaria. ...5 puntos

Finalmente, evaluamos la función de producción en los puntos óptimos encontrados para obtener la producción máxima:

$$P(300,80) = 50(300)^{0.6}(80)^{0.4} \approx 8840.5$$

La producción máxima diaria es de aproximadamente 8840 unidades. ...5 puntos